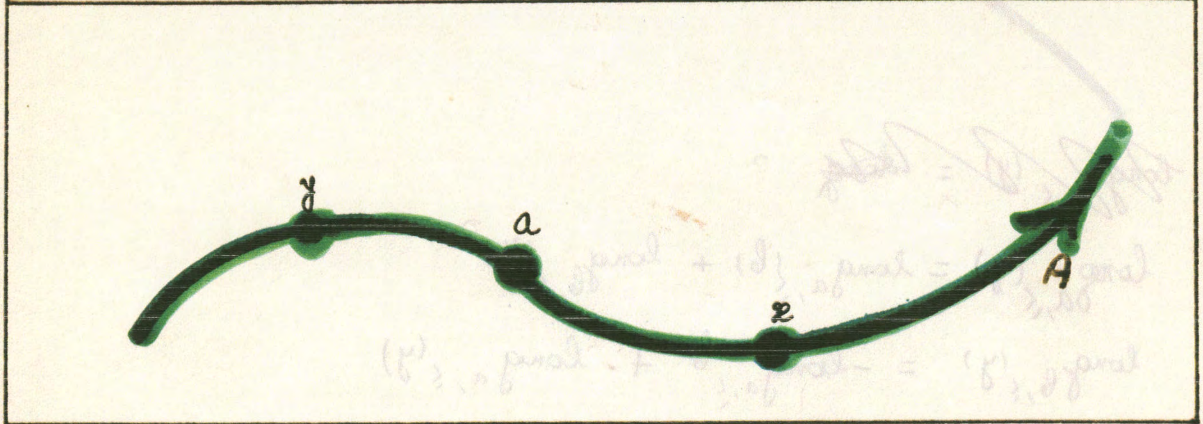
2

20 RECTIFICATION D'ARCS.

Longueur d'un arc rectifiable ordonné pointé	
$y < a \; : \; s(y) = -\text{long}\,[a\,y]$	$x > a \; : \; s(x) = \text{long}\,[a\,x]$



Il eût été plus complet de noter la fonction $s : A \to \mathbb{R}^+$

$\text{long}_{a,\leqslant}$

afin de rappeler qu'elle dépendait du point $a \in A$ et de l'ordre $\leqslant$ de l'arc A.

	ARC MÉTRIQUE		$A, \mathcal{T}_{us}, d$
=	ARC		$A, \mathcal{T}_{us}$
muni d'une	MÉTRIQUE d	telle que	$\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{us}$

Dans tout arc métrique $A, \mathcal{T}_{us}, d$

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_0^+ \ \exists x_1 \in A : \quad 0 < d(x, x_1) < \varepsilon$$

* $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{us}$

$\vdash$ Toute boule ouverte de A, d est réunion d'intervalles ouverts de $A, \mathcal{T}_{us}$ ■

Pour tout arc métrique rectifiable ordonné pointé $A, \mathcal{T}_{us}, d, \leqslant, a$

la longueur $s : A \to \mathbf{R}$ est

une bijection	$A \to sA$
un iso d'ordonnés	$A, \leqslant \to sA, \leqslant$
un iso d'espaces métriques	$A, \tilde{d} \to sA, d_{us}$
un homéo	$A, \mathcal{T}_{us} \to sA, \mathcal{T}_{us}$

Il reste à montrer que s est un homéo $A, \mathcal{T}_{us} \to sA, \mathcal{T}_{us}$.

s est une fonction continue $A, \mathcal{T}_{us} \to \mathbf{R}, \mathcal{T}_{us}$

s est croissante stricte.

En chacun de ses points de discontinuité x, toute fonction croissante d'arcs $f : A \to B$ présente un $^\triangledown$saut gauche ▲

$a \in A$	Arc rectifiable $A, \leqslant, \geqslant$	$b \in A.$

$$\mathrm{long}_{a,\geqslant} = -\,\mathrm{long}_{a,\leqslant}$$

$$\mathrm{long}_{b,\leqslant} = \mathrm{long}_{a,\leqslant} - \mathrm{long}_{a,\leqslant}(b)$$

$$\mathrm{long}_{b,\geqslant} = -\mathrm{long}_{a,\leqslant} + \mathrm{long}_{a,\leqslant}(b)$$

□ La longueur d'un arc rectifiable ordonné pointé est croissante stricte ■

□ RECTIFICATION des ARCS RECTIFIABLES

La longueur d'un arc rectifiable ordonné pointé A est un homéo croissant de A sur son image, sous espace de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un isomorphisme d'arc ordonné de A sur son image dans $\mathbb{R}$.

1 La longueur d'un arc rectifiable ordonné pointé est continue

▲ s longueur de l'arc rectifiable ordonné pointé $A, \leqslant, a$

s croissante stricte

En chacun de ses points de discontinuité x, toute fonction croissante d'arcs $f : A \to B$ présente 4

un ▽saut gauche▲ $\quad l' = f(x) - \sup\{f(y) \mid y \in A \wedge y < x\}$ non nul.

ou un ▽saut droit▲ $\quad l = \inf\{f(y) \mid y \in A \wedge y > x\} - f(x)$ non nul.

□ $\mathrm{long}_{\leq, a}$ présente un saut droit non nul en x

ssi $\mathrm{long}_{\geq, a}$ présente un saut gauche non nul en x ■

Il suffira donc de prouver

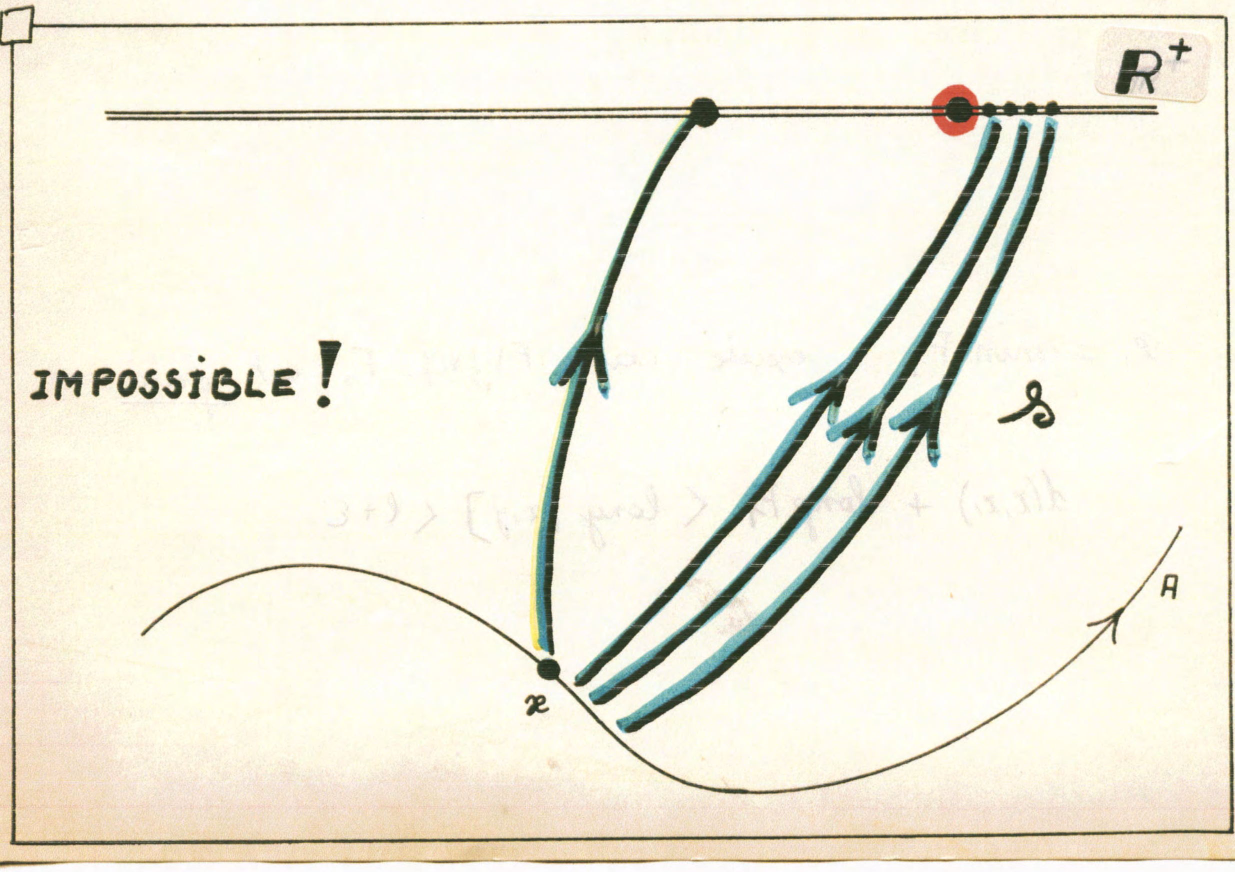
[1'] La longueur d'arc rectifiable ordonné pointé

$$s : A, \leq, a \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

ne présente aucun saut droit non nul.

Autrement dit

□



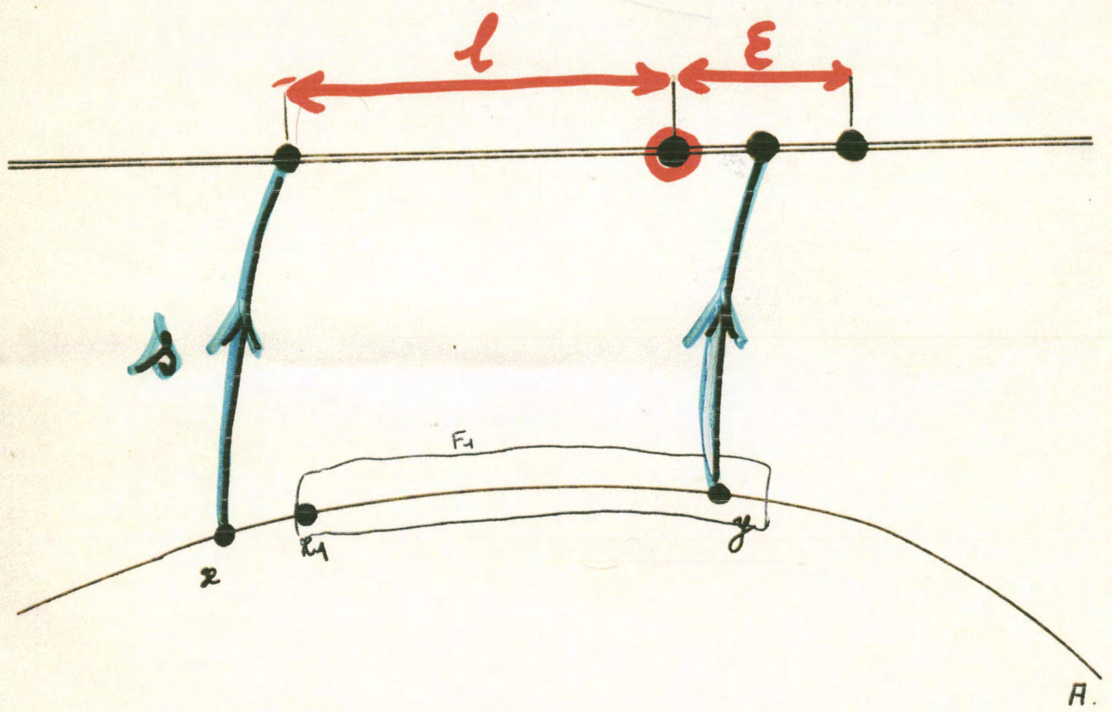
<u>en pointe en x</u>

$l =$ saut droit en x $= \inf\{\text{long}[xu] \mid u \in A \wedge u > x\}$

- $l > 0$

$0 < 2\varepsilon < l$

$y \in A \wedge y > x \wedge l < \text{long}[xy] < l + \varepsilon$



$\{x, y\} \subset F \in \mathcal{P}_f[xy]$

$l < \text{long}\, F$

$F_1 = F \setminus \{x\}$

$x_1 = \min F_1$

$d(x, x_1) < \varepsilon$

long $F < l + \varepsilon$

* $\text{long}\, F = d(x,x_1) + \text{long}\, F_1 > l$

$$\text{long}\, F_1 > l - d(x,x_1)$$

$$\text{long}\, F_1 > l - \varepsilon$$

$$\text{long}\, [x_1 y] \geqslant \text{long}\, F_1 > l-\varepsilon$$

$$\text{long}\, [x\, y] = \text{long}\, [x\, x_1] + \text{long}\, [x_1\, y] < l+\varepsilon$$

$$\text{long}\, [x\, x_1] < l+\varepsilon - \text{long}\, [x_1 y]$$

$$\text{long}\, [x\, x_1] < l+\varepsilon - (l-\varepsilon)$$

$$\text{long}\, [x\, x_1] < 2\varepsilon < l$$

$$\text{long}\, [x\, x_1] < l$$

ce qui contredit la définition du saut l

$$l = 0$$

■

: La fonction $s : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue.

Reste à prouver

□ s est un homéo croissant $A \longrightarrow sA \subset \mathbb{R}^+$

* s est une application continue croissante $A \longrightarrow \mathbb{R}$

s applique tout arc fermé $[x\, y] \subset A$ sur un arc fermé sous-espace de $\mathbb{R}$

$s_{[xy]}$ est une bijection croissante $[x\, y] \longrightarrow [s(x)\; s(y)]$

s est un homéo croissant $A \longrightarrow sA$ sous-espace de $\mathbb{R}$

■

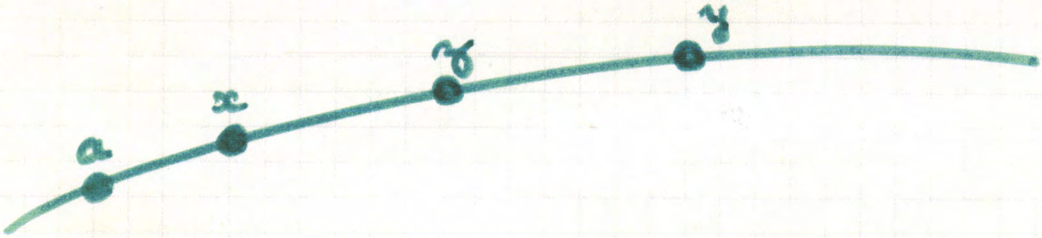
$$s_b(x,y) = |s_b(x) - s_b(y)| = |\text{long}_{b,\leq}(x) - \text{long}_{b,\leq}(y)|$$

$$= |\text{long}_{a,\leq}(x) - \text{long}_{a,\leq}(b) + \text{long}_{a,\leq}(b) - \text{long}_{a,\leq}(y)|$$

$$= |\text{long}_{a,\leq}(x) - \text{long}_{a,\leq}(y)|$$

$$= |s_a(x) - s_a(y)|$$

$$= s_a(x,y)$$



$$s(x,y) = |s(x) - s(y)| = |\text{long}_{a,\leq}(x) - \text{long}_{a,\leq}(y)|$$

$$\text{long}_{a,\leq}(y) = \text{long}\,[a,y] = \text{long}\,[a,x] + \text{long}\,[x,z] + \text{long}\,[z,y]$$

$$= \text{long}_{a,\leq}(x) + \text{long}_{x,\leq}(z) + \text{long}_{z,\leq}(y)$$

$$s(x,y) = |\text{long}_{a,\leq}(x) - \text{long}_{a,\leq}(x) - \text{long}_{x,\leq}(z) - \text{long}_{z,\leq}(y)|$$

$$= |\text{long}_{x,\leq}(z) + \text{long}_{z,\leq}(y)| \quad \geq 0$$

$$= |\text{long}_{a,\leq}(z) - \text{long}_{a,\leq}(x) + \text{long}_{a,\leq}(y) - \text{long}_{a,\leq}(z)| \quad \geq 0$$

$$= |\text{long}_{a,\leq}(z) - \text{long}_{a,\leq}(x)| + |\text{long}_{a,\leq}(y) - \text{long}_{a,\leq}(z)|$$

$$= |s(z) - s(x)| + |s(y) - s(z)|$$

$$= s(x,z) + s(z,y)$$

$$\delta(x,y)=0 \iff |s(x)-s(y)|=0$$

$$\Updownarrow$$

$$s(x)-s(y)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$s(x)=s(y)$$

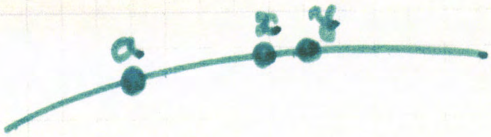
$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{long}_{a,\leq}(x)=\mathrm{long}_{a,\leq}(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{long}[a,x]=\mathrm{long}[a,y]$$

$$x=y \iff$$



$$\begin{aligned}\delta(x,y) = |s(x)-s(y)| = |-1|\,|s(x)-s(y)| &= |(-1)(s(x)-s(y))| \\ &= |s(y)-s(x)| \\ &= \delta(y,x)\end{aligned}$$

$$\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,x)$$

$$\begin{aligned}|s(x)-s(y)| &= |s(x)-s(z)+s(z)-s(y)| \\ &\leq |s(x)-s(z)|+|s(z)-s(y)| = \delta(x,z)+\delta(z,y)\end{aligned}$$

δ est une distance sur A

La fonction $s : A \to \mathbb{R}$ est donc continue.

Reste à prouver

$$\boxed{2} \quad s \text{ est un homéo } A, \mathcal{T}_{us} \to sA, \mathcal{T}_{us}$$

On prouve la proposition plus générale

Pour tous Arcs A et B

Injection continue monotone $i : A \to B$

est

Homéo $A \to iA$

$*$ Toute partie infinie connexe d'un arc est un arc (cf. EX d

$\vdash$ iA est arc

$\vdash$ i est bijection monotone d'arcs

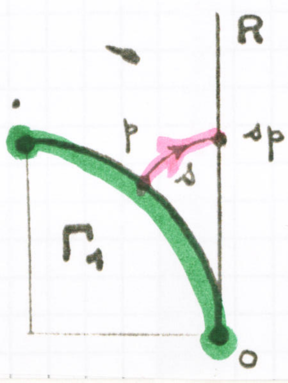
$\vdash$ i est homéo $A \to iA$ ■

En utilisant le fait connu :
toute fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est
rectifiable de longueur $\leqslant |a-b| + |f(a) - f(b)|$, on obtient une

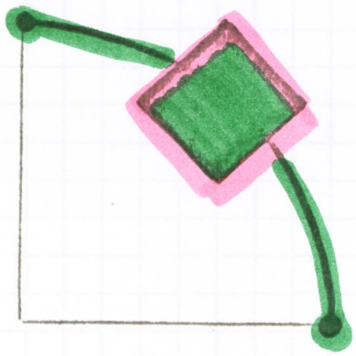
MANIÈRE EXPÉDITIVE

pour démontrer la continuité de la longueur (euclidienne) du quart de cercle euclidien Γ_1

$$s : \Gamma_1 \to \mathbb{R} : p \mapsto \text{longueur euclidienne de l'intervalle } [o,p]$$



La continuité de s est évidente :
Pour tout voisinage $W =]sp-\varepsilon , sp+\varepsilon[$ de sp, la trace sur Γ_1 du taxidisque de centre p et de rayon ε est un voisinage V de p tel que $sV \subset W$ ■



■

Pour tout arc métrique rectifiable $A, \mathcal{T}_{us}, d$

$$\forall a,b \in A : \mathrm{long}_d [a,b] = \mathrm{long}_d]a,b] = \mathrm{long}_d [a,b[= \mathrm{long}_d]a,b[$$

✻ $A, \tilde{d}$ est isométrique à un sous-arc de $\mathbf{R}, d_{us}$ ■

La longueur d'un cercle euclidien ordonné égale le double de la longueur du demi-cercle (fermé, ouvert ou semi-ouvert !)

■

Pour tout arc métrique rectifiable $A, \mathcal{T}_{us}, d$

$$\mathcal{T}_{us} = \mathcal{T}_{\tilde{d}} \supset \mathcal{T}_d$$

Par définition $\mathcal{T}_{us} \supset \mathcal{T}_d$

Reste à montrer que $\mathcal{T}_{us} = \mathcal{T}_{\tilde{d}}$

✻ En utilisant le théorème p. (et ses notations) :

$s : A, \tilde{d} \to sA, d_{us}$ est une isométrie

$s : A, \mathcal{T}_{\tilde{d}} \to sA, \mathcal{T}_{us}$ est un homéo

$s : A, \mathcal{T}_d \to sA, \mathcal{T}_{us}$ est un homéo

$\vdash$ $1_A : A, \mathcal{T}_{\tilde{d}} \longrightarrow A, \mathcal{T}$ est un homéo ∎

Pour tout arc métrique rectifiable compact $A, \mathcal{T}_{us}, d$

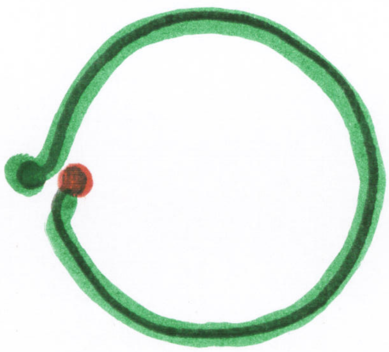
$$\mathcal{T}_{us} = \mathcal{T}_{\tilde{d}} = \mathcal{T}_d$$

✻ $\mathcal{T}_d$ est séparée

$\mathcal{T}_{us}$ est compacte

Toute topologie compacte (sur un ensemble) est minimale dans l'ensemble des topologies séparées (sur cet ensemble) ∎

Voici un arc métrique $A, \mathcal{T}_{us}, d$ tel que $\mathcal{T}_{\tilde{d}} \neq \mathcal{T}_d$



EX Pour tout arc rectifiable $A, \mathcal{T}_{us}, d$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{(1)\quad \mathcal{T}_{\tilde{d}} = \mathcal{T}_{us}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \boxed{(3)\quad \mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{us}} \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\boxed{(2)\quad \text{La longueur } s : A, \mathcal{T}_{us} \to R \text{ est continue}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{(4)\quad A, \mathcal{T}_{us}, d \text{ est arc métrique}}
\end{tikzcd}$$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) c'est la définition d'arc métrique

Nous allons montrer : (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3)

✲ La première implication résulte du théorème p.

La dernière implication résulte de ce que $\tilde{d} \geq d$ donc $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\tilde{d}}$

$s : A, \mathcal{T}_{us} \to R$ continue injective

$\vdash s : A, \mathcal{T}_{us} \to sA$ homéo

$s : A, \tilde{d} \to sR$ isométrie

$\vdash s : A, \mathcal{T}_{\tilde{d}} \to sR$ homéo

$\vdash 1_A : A, \mathcal{T}_{us} \to A, \mathcal{T}_{\tilde{d}}$ homéo ■

EX

Arc métrique pour la distance euclidienne

$\Updownarrow$

Arc métrique pour la taxidistance

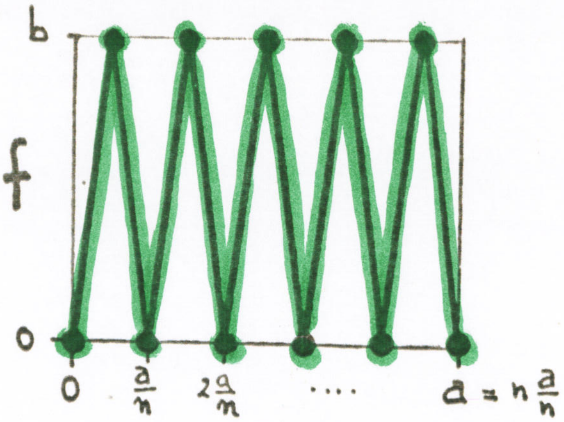
✲ $\mathcal{T}_{eucli} = \mathcal{T}_{taxi}$ ■

$\mathbb{R}, \tau_{uo}, d_{uo}$ est un arc métrique rectifiable (rectifiél) de longueur infinie.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_0^+$$

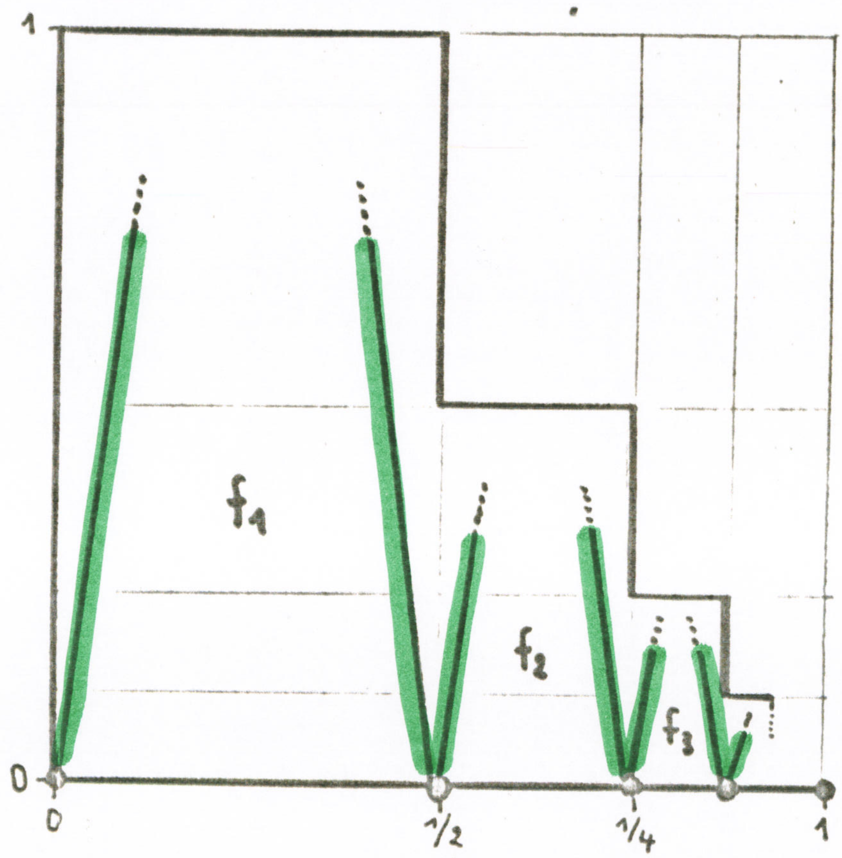
Si $nb \geqslant 1$ $(n \in \omega_0)$

Alors.



f est un arc de longueur $\geqslant n \cdot b \geqslant 1$

c □



$\forall i : \text{long}\, f_i \geqslant 1$

f est un arc (puisque fonction continue $[0,1] \to \mathbb{R}$)
de longueur infinie
non rectifiable $\quad \left(\tilde{d}((0,0),(1,0)) = +\infty \right)$

7

RECTIFIER L'ARC RECTIFIABLE A

= Munir A de la distance s définie par

$\forall x,y \in A$: $s(x,y) = |s(x) - s(y)|$

où $s = \text{long}_{a,\leqslant}$ où $a \in A$ et $\leqslant$ est l'un des ordres de A

Cette distance est indépendante du choix de $(a, \leqslant)$

$\mathcal{T}_s$ est la topologie de l'arc A

$\forall z \in [xy] \subset A$: $s(x,y) = s(x,z) + s(z,y)$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\text{long}\,[ab] = \text{long}\,]ab] = \text{long}\,[ab[= \text{long}\,]ab[$ ■

Pour tout arc rectifiable A

$\forall a,b \in A$ $\text{long}\,[ab] = \text{long}\,]ab] = \text{long}\,[ab[= \text{long}\,]ab[$

La longueur d'un cercle ordonné égale le double de la longueur du demi-cercle (fermé, ouvert, ou semi-ouvert !) ■